Partie A : Étude d'une fonction

1. a. Comme somme et produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $I =]0; 1,5]$, f est dérivable sur I .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in I, f'(x) &= 18x \times [1 - 2\ln(x)] + 9x^2 \times \left(-2 \times \frac{1}{x}\right) + 0 \\ &= 18x - 36x\ln(x) - \frac{18x^2}{x} \\ &= 18x - 36x\ln(x) - 18x \\ &= -36x\ln(x) \end{aligned}$$

b. On obtient le tableau suivant :

x	0		1		1.5
$-36x$	0	-		-	
$\ln(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	
Variations de f					

avec $f(1,5) \approx 18,83$.

c. Voir la question précédente.

2. Pour tout $x \in I$, $-36\ln(x) - 36 \geq 0 \Leftrightarrow -36\ln(x) \geq 36$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{36}{-36}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

On obtient le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		1.5
$f''(x)$		+	0	-	
Convexité de f	Convexe		Concave		

3. a. Comme somme et produit de fonctions dérivables sur I, F est dérivables sur I, et, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = 10 + 5 \times 3x^2 - \left(6 \times 3x^2 \ln(x) + 6x^3 \times \frac{1}{x} \right)$$

$$F'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln(x) - \frac{6x^3}{x}$$

$$F'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln(x) - 6x^2$$

$$F'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x)$$

$$F'(x) = 10 + 9x^2 [1 - 2\ln(x)]$$

$$F'(x) = f(x)$$

F est bien une primitive de f sur I.

b. $\int_1^{1,5} f(x) dx = F(1,5) - F(1)$

On obtient : $\int_1^{1,5} f(x) dx \approx 8,66$.

Partie B : Application économique

Proposition 1 :

« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »

La période des six derniers mois correspond à l'intervalle $[1; 1,5]$.

Or, $f(1) = 19$ et $19 \times 0,75 = 14,25 > f(1,5)$, d'après la question A. 2. c.

La proposition est donc vraie.

Proposition 2 :

« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »

La valeur moyenne de l'action sur les six derniers mois correspond à $\frac{1}{1,5-1} \int_1^{1,5} f(x) dx$,

soit $\frac{1}{0,5} \int_1^{1,5} f(x) dx = 2 \times \int_1^{1,5} f(x) dx$.

En utilisant la valeur obtenue à la question A. 3. b., on obtient une valeur moyenne d'environ 17,33, soit strictement supérieure à 17 €.

La proposition est donc fausse.